TD 4 - Electromagnétisme

# Energie électromagnétique

## Questions de cours

*Pour apprendre le cours : vérifiez que vous savez répondre à chaque question.*

1. Définir la densité volumique d'énergie électromagnétique.
2. En partant de l'énergie emmagasinée dans un condensateur, retrouver l'expression de sa capacité.
3. En partant de l'énergie emmagasinée dans une bobine, retrouver l'expression de son inductance.
4. Définir la densité volumique de puissance cédée aux porteurs de charge. A quoi est due cette puissance ?
5. Définir un milieu ohmique et donner la loi d'Ohm locale. Que devient la puissance volumique cédée aux porteurs de charge ?
6. Etablir l'expression de la résistance d'un conducteur ohmique en 1D et en régime stationnaire. En déduire la loi d'Ohm globale.
7. Définir le vecteur de Poynting et la puissance rayonnée par le champ électromagnétique.
8. Enoncer le bilan d'énergie électromagnétique sous sa forme globale et sous sa forme locale.

*Formulaire*
En coordonnées sphériques :

$$\mathrm{div}(\overrightarrow{A}) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(A_\theta\sin\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{A}) = \left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(A_\varphi\sin\theta)}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)\overrightarrow{u_r} + \left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}\right)\overrightarrow{u_\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\overrightarrow{u_\varphi}$$

En coordonées cylindriques :

$$\mathrm{div}(\overrightarrow{A}) = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{A}) = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\overrightarrow{u_r} + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\overrightarrow{u_\theta} + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\overrightarrow{u_z}$$

## Exercices de cours - Savoirs-Faire

### SF 1 - Déterminer une résistance

On considère un cylindre ohmique d'axe $z$, de longueur $l$, de rayon $a$ et de conductivité électrique $\gamma$.
On suppose que le vecteur densité de courant est uniforme sur une section du cylindre et on se place en régime stationnaire. Déterminer l'expression de la résistance du cylindre.

### SF 2 - Faire un bilan d'énergie électromagnétique

On reprend la situation précédente.
Retrouver l'expression de la puissance cédée au conducteur par effet Joule en fonction de $R$.
La relation de conservation de l'énergie est-elle bien vérifiée ?

## Exercice phare

### Exercice 1 - Chauffage par induction

On étudie dans cet exercice un dispositif modèle permettant de chauffer un cylindre métallique par induction électromagnétique, potentiellement jusqu'à une température supérieure à sa température de fusion. Il s'agit d'une bobine parcourue par un courant alternatif $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$ de forte intensité. Au centre de cette bobine est placé un cylindre conducteur, qui est le métal à chauffer, de conductivité électrique $\gamma$. Ce principe est par exemple utilisé dans des dispositifs de soudure électromagnétique.

1. Faire un schéma du dispositif et donner sans calcul l'expression du champ créé par la bobine. Pour simplifier, on négligera tout effet de bord, ce qui revient à l'assimiler à un solénoïde infini.
2. Justifier qu'un champ électrique apparaît au sein de la bobine. En déduire qualitativement pourquoi le métal placé au centre chauffe. Déterminer l'expression du champ $\overrightarrow{E}$ créé.
3. En déduire la densité de courant induite dans le matériau.
4. Etablir l'expression de la puissance volumique dissipée par effet Joule. Où le métal va-t-il fondre en premier ? Déterminer la valeur moyenne de la puissance volumique dissipée par effet Joule sur le conducteur.
5. Quelle est l'influence de la fréquence d'oscillation du champ magnétique sur la valeur moyenne de la puissance dissipée par effet Joule dans le conducteur.

## Exercices en plus

### Exercice 2 - Résistance en géométrie sphérique

Deux sphères concentriques de rayons $R_1$ et $R_2$ portées aux potentiels respectifs $V_1$ et $V_2$, sont séparées par un milieu conducteur de conductivité $\gamma$. On désire exprimer la résistance électrique équivalente.

1. Montrer que le champ électrique dans le conducteur est radial et ne dépend que de $r$.

2. En déduire la direction du vecteur densité de courants et les variables dont il dépend.
3. En notant I l'intensité du courant circulant entre les sphères de façon radiale, exprimer la densité de courant $\overrightarrow{j}(r)$.
4. En déduire l'expression du champ électrique en tout point du conducteur.
5. En déduire la densité volumique de charges en tout point du conducteur. Ce résultat était-il attendu ?
6. Calculer l'expression de la résistance $R = \dfrac{V_1 - V_2}{I}$.
7. Si l'épaisseur $e = R_2 - R_1$ est très faible devant les rayons, proposer une forme simplifiée pour cette expression.

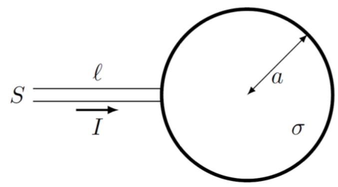
## Exercice 3 - Décharge d'un cylindre dans un autre

Considérons deux cylindres de même axe $(Oz)$, de rayons $R_1$ et $R_2 > R_1$. Le cylindre de rayon $R_1$ porte initialement une charge $Q_0$ en surface. Pour $t < 0$, l'espace entre les cylindres est assimilé au vide. À $t = 0$ on introduit entre les deux cylindres un fluide de conductivité $\gamma$, qui entraîne la décharge du cylindre de rayon $R_1$. On note $Q(t)$ la charge portée par ce cylindre.

1. Déterminer la direction du champ électrique $\overrightarrow{E}$ et déterminer la variable dont dépend sa norme.
2. Montrer que le champ magnétique est nul.
3. Exprimer $\overrightarrow{E}$ en fonction de $Q(t)$.
4. En utilisant une équation de Maxwell, déterminer une équation différentielle vérifiée par $Q(t)$. En déduire un temps caractéristique de décharge.
5. Que se serait-il passé si c'était le cylindre de rayon $R_2$ qui avait été initialement chargé ?

## Exercice 4 - Charge d'une sphère

Une sphère de rayon $a$ est mise sous tension afin d'être chargée. Elle est supposée parfaitement conductrice : les charges ne peuvent subsister qu'à sa surface, avec une densité surfacique $\sigma(t)$ supposée uniforme à tout instant.




Elles sont apportées par un fil de conductivité $\gamma$, de longueur $\ell$ et section $\mathcal{S}$, parcouru par un courant d'intensité $I$, dont une extrémité est reliée à la sphère et l'autre à un générateur non représenté sur le schéma. Le processus est supposé suffisamment lent pour que les résultats de l'électrostatique demeurent valables bien que $\sigma$ dépende du temps.

1. Dans un premier temps, on suppose que la charge se fait à courant $I$ constant. En procédant à un bilan de charge, déterminer l'évolution de la densité surfacique de charge $\sigma(t)$ en fonction du temps.

Dans un second temps, on suppose que c'est le potentiel $V_0$ imposé par le générateur qui demeure constant et non plus le courant $I$.

2. Le théorème de Gauss permet de montrer que le champ électrique créé par la sphère est nul à l'intérieur et vaut à l'extérieur de la sphère $\overrightarrow{E} = \dfrac{\sigma a^2}{\varepsilon_0 r^2}\overrightarrow{e_r}$ En déduire le potentiel $V_s$ auquel se trouve la surface de la sphère en prenant comme référence $V = 0$ à l'infini.
3. En reprenant la démarche de la première question, établir l'équation différentielle vérifiée par $\sigma(t)$ et la résoudre.

## Exercice 5 - Energie dans un solénoïde

Un solénoïde de longueur $\ell$, de rayon $a$, d'axe $(O, \overrightarrow{e_z})$, est constitué d'un enroulement de $n$ spires circulaires par unité de longueur. Afin de simplifier les calculs, on fait l'approximation du solénoïde infiniment long et on néglige tous les effets de bords. En particulier, on fera l'approximation $\overrightarrow{B} \simeq \overrightarrow{0}$ partout à l'extérieur du solénoïde. Les spires du solénoïde sont parcourues par l'intensité variable $i(t)$. On admet que le régime est suffisamment lent pour que le champ magnétique ait la même expression qu'en régime stationnaire. C'est l'approximation des régimes quasi-stationnaires magnétiques (ARQS magnétique).

1. Rappeler l'expression du champ magnétique $\overrightarrow{B}$ dans le solénoïde. En déduire l'expression du champ électrique $\overrightarrow{E}$ induit.
2. Rappeler l'expression de la densité volumique $u_{em}$ d'énergie électromagnétique. À quelle condition le terme magnétique $u_m$ est-il prépondérant devant le terme électrique $u_e$ ? Interpréter.
3. On suppose la condition $u_m \gg u_e$ satisfaite. Déterminer l'énergie électromagnétique $U_{em}$ contenue dans le solénoïde. En déduire l'expression du coefficient d'auto-inductance $L$.
4. Calculer le vecteur de Poynting en tout point intérieur au solénoïde. En déduire l'expression de la quantité $\mathcal{E}$ d'énergie électromagnétique entrant dans le tube formé par le solénoïde lorsque l'intensité passe de 0 à $I$. Interpréter.

## Exercice 6 - Modélisation électromagnétique de la charge d'un condensateur

Le but de l'exercice est d'étudier le bilan énergétique d'un circuit RC soumis à un échelon $U_0$ par une approche électromagnétique. Le condensateur est initialement déchargé.

1. Déterminer l'évolution de $u(t)$ par une approche électrocinétique.

Le condensateur est modélisé par deux disques parallèles de rayons $a$, d'axe $(Oz)$, séparés une épaisseur $e \ll a$, de sorte que l'on puisse considérer que le condensateur est un plan chargé infiniment grand. Le milieu entre les armatures est assimilé au vide. On suppose la charge suffisamment lente pour pouvoir généraliser les résultats obtenus en électrostatique :
$C = \dfrac{\varepsilon_0 \pi a^2}{e}$ et dans l'espace inter-armatures $\overrightarrow{E}(M,t) = \dfrac{\sigma(t)}{\varepsilon_0}\overrightarrow{u_z}$.

2. Exprimer $\overrightarrow{E}$ en fonction de $u$ dans l'espace inter-armatures.
3. Quelles sont les sources de champ magnétique entre les armatures ? Justifier à partir d'une équation de Maxwell que les propriétés de symétrie de $\overrightarrow{j}$ et de $\dfrac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$ ont les mêmes conséquences sur le champ magnétique. En déduire que $\overrightarrow{B} = B_\theta \overrightarrow{u_\theta}$.
4. En utilisant les équations de Maxwell, déterminer $\overrightarrow{B}$ en fonction de $u$ dans l'espace inter-armatures.
5. Exprimer le vecteur de Poynting à l'intérieur du condensateur. En déduire l'expression de la puissance rentrant dans le volume entre les armatures. D'où vient cette puissance ?
6. Réécrire la puissance entrante comme la dérivée temporelle d'une fonction de $C$ et $u$. Commenter le résultat obtenu.
7. En déduire l'expression de l'énergie électromagnétique qui est entrée dans le condensateur pendant la charge en fonction de $C$ et $U_0$.